ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 42, No. 4, 1982

EXISTENCE D'UN GENERATEUR SUIVANT UNE SOUS-SUITE DE DENSITE SUPERIEURE NULLE

PAR

SÉBASTIEN FERENCZI

ABSTRACT

Ergodic theory: for every dynamical system $(X, \mathscr{A}, T, \mu)$, totally ergodic and of finite entropy, there exist a sequence S of integers, of upper density zero, and a partition Q of X, such that $\vee_{i \in S} T^{-i}Q$ is the whole σ-algebra $\mathscr{A}$. Furthermore, there is a "universal" sequence S^0 for which this property is true if we restrict ourselves to the class of strongly mixing systems.

Soit $(X, \mathscr{A}, T, \mu)$ un système dynamique d'entropie non nulle; peut-il vérifier $\mathscr{A} = \vee_{i \in S} T^i P$ pour une partition P finie et un sous-ensemble S de $\mathbf{Z}$ de densité supérieure nulle? (S est dit de densité supérieure nulle si, pour tout ε strictement positif, il existe N_0 tel que pour tout N supérieur à N_0 et tout entier j,

$$\operatorname{card}(S \cap [j-N, j+N]) < 2\varepsilon N.)$$

La réponse est oui, (X, T) peut même être un schéma de Bernoulli. Plus précisément:

Proposition 1. *Soit $(X, \mathscr{A}, T, \mu)$ un système dynamique d'entropie finie totalement ergodique (c'est-à-dire où T^n est ergodique pour tout n); alors il existe une partition finie Q de X et un ensemble d'entiers S de densité supérieure nulle tels que $\vee_{i \in S} T^{-i}Q$ soit toute la σ-algèbre $\mathscr{A}$.*

La méthode s'inpire d'un article d'Ornstein et Weiss [1], qui, au passage, démontrent le résultat pour une suite de densité inférieure nulle. Je remercie beaucoup J.-P. Thouvenot qui m'a posé cette question et m'a aidé à y répondre.

Démonstration. Soit $P = (P_1, \cdots, P_k)$ un générateur fini de (X, T). On se donne une suite d'entiers g_n tendant vers $+\infty$ et une suite ε_n tendant vers 0, vérifiant:

Received April 24, 1981 and in revised form February 7, 1982

(0) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)g_n} < 1,$$

(1) $$g_n \equiv 1 \quad [2n+1];$$

on précisera d'autres conditions de croissance sur g_n et sur ε_n à la fin.

On va construire pour tout entier n une partition Q_n de X et un sous-ensemble fini S_n de $\mathbf{Z}$ vérifiant:

(2_n) $$S_n \subset \{0\} \cup [-R_n, -R_{n-1} - e^n] \cup [R_{n-1} + e^n, R_n]$$

où

$$R_j = \operatorname*{Sup}_{x \in \cup_{l \le j} S_l} |x|,$$

(3_n) deux termes consécutifs de S_n diffèrent d'au moins e^n,

(4_n) $$Q_n \supset P,$$

(5_n) $$Q_n = \{Q_i^n, 1 \leq i \leqq k;\ \bar{Q}_i^n, 1 \leqq i \leqq k;\ Q_{ij}^n, 1 \leqq i \leqq k, 1 \leqq j \leqq k\},$$

(6_n) $$\text{si } E_n = \bigcup_{i=1}^{k} \bar{Q}_i^n, \quad \mu(E_n) \leqq \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(2j+1)g_j},$$

(7_n) $\bigvee_{i \in S_n} T^i Q_n$ raffine $\bigvee_{|j| \le n} T^j P$ sauf sur un ensemble de mesure inférieure à $2/g_n + 2\varepsilon_n$,

(8_n) $$|Q_n - Q_{n-1}| < 2/g_n.$$

On part de $S_0 = \{0\}$ et $Q_0 = P$. Supposons la construction réalisée au stade $n-1$.

Construction de S_n. On choisit $(2n+1)^2 g_n$ entiers positifs, notés $u_{h,i,j}$ ($-n \leqq h \leqq n$, $0 \leqq i \leqq g_n - 1$, $-n \leqq j \leqq n$), vérifiant:

(9) $$u_{h,i,j} \equiv i \quad [g_n] \qquad \text{pour tout } (h,i,j),$$

(10) $$u_{h,i,j} \equiv j \quad [2n+1] \qquad \text{pour tout } (h,i,j),$$

(11) $$u_{-n,0,-n} > R_{n-1} + 2n + e^n, \quad \text{où } R_{n-1} \text{ est défini par } (2_{n-1}),$$

(12) $$u_{(h,i,j)+1} > 2u_{(h,i,j)} + 2n + e^n,$$

pour tout (h,i,j), où on note $(h,i,j)+1$ le successeur de (h,i,j) dans l'ordre lexicographique.

Ces relations peuvent être réalisées simultanément, (9) et (10) étant compatibles grâce à (1). On pose:

$$\bar{S}_n = \{u_{h,i,j},\ -n \leqq h \leqq n,\ 0 \leqq i \leqq g_n - 1,\ -n \leqq j \leqq n\}$$

$$\text{(A)} \qquad \cup \{u_{h,i,j} - u_{h,i',j'} + h,\ -n \leqq h \leqq n,\ 0 \leqq i \leqq g_n - 1,$$

$$0 \leqq i' \leqq g_n - 1,\ -n \leqq j \leqq n,\ -n \leqq j' \leqq n,\ \text{et } (i,j) \neq (i',j')\}.$$

Grâce à (11) et (12), $\bar{S}_n$ est comprise dans les intervalles $]-\infty, -R_{n-1} - e^n]$ et $[R_{n-1} + e^n, +\infty[$ et deux termes consécutifs de $\bar{S}_n$ diffèrent d'au moins e^n.

Soit maintenant $\bar{R}_n = \operatorname{Sup}_{x \in \bar{S}_n} |x|$. On choisit un entier λ_n vérifiant:

$$\text{(13)} \qquad \lambda_n \equiv 0 \quad [(2n+1)g_n],$$

$$\text{(14)} \qquad \lambda_n > \bar{R}_n + e^n.$$

Par (6_{n-1}), (0) et ergodicité de T^{λ_n},

$$\mu\left(\bigcap_{\gamma=-\infty}^{+\infty} T^{\gamma\lambda_n} E_{n-1}\right) = 0.$$

Donc, pour un N_n assez grand,

$$\mu\left(\bigcap_{\gamma=-N_n}^{N_n} T^{\gamma\lambda_n} E_{n-1}\right) < \frac{\varepsilon_n}{(2n+1)g_n}.$$

On choisit enfin $(2n+1)g_n$ entiers positifs notés $v_{\alpha,\beta}$ ($0 \leqq \alpha \leqq g_n - 1$, $-n \leqq \beta \leqq n$), vérifiant

$$\text{(15)} \qquad v_{\alpha,\beta} \equiv 1 - \alpha \quad [g_n],$$

$$\text{(16)} \qquad v_{\alpha,\beta} \equiv 1 - \beta \quad [2n+1],$$

$$\text{(17)} \qquad \bar{R}_n \leqq v_{\alpha,\beta} \leqq 2\bar{R}_n,$$

(18) deux $v_{\alpha,\beta}$ consécutifs diffèrent d'au moins e^n.

C'est possible dès que $\bar{R}_n$ est supérieur à $(2n+1)g_n[e^n + (2n+1)g_n]$; or (A) et (12) obligent $\bar{R}_n$ à être supérieur à $e^n[(2n+1)^2 g_n + (2n+1)^2 g_n^2]$, ((15) et (16) restant compatibles grâce à (1)). On pose $w_{\alpha,\beta,\gamma} = \gamma\lambda_n + v_{\alpha,\beta}$ et

$$\tilde{S}_n = \{w_{\alpha,\beta,\gamma},\ 0 \leqq \alpha \leqq g_n - 1,\ -n \leqq \beta \leqq n,\ -N_n \leqq \gamma \leqq N_n\}.$$

On a immédiatement:

$$\text{(19)} \qquad w_{\alpha,\beta,\gamma} \equiv 1 - \alpha \quad [g_n] \qquad \text{pour tout } \alpha, \beta, \gamma,$$

$$\text{(20)} \qquad w_{\alpha,\beta,\gamma} \equiv 1 - \beta \quad [2n+1] \qquad \text{pour tout } \alpha, \beta, \gamma,$$

$$\text{(21)} \qquad \mu\left(\bigcap_{\gamma=-N_n}^{N_n} T^{-w_{\alpha,\beta,\gamma}} E_{n-1}\right) < \frac{\varepsilon_n}{(2n+1)g_n} \qquad \text{pour tout } \alpha, \beta.$$

En outre, deux termes consécutifs de $\tilde{S}_n$ diffèrent d'au moins e^n, et $\tilde{S}_n \subset \{0\} \cup]-\infty, -\bar{R}_n - e^n] \cup [\bar{R}_n + e^n, +\infty[$.

On pose $S_n = \bar{S}_n \cup \tilde{S}_n$, et S_n vérifie bien (2_n) et (3_n).

Construction de Q_n. On prend une tour de Rokhlin de hauteur h_n supérieure à $2R_n g_n$, de base F_n, de masse totale

$$\mu\left[\bigcup_{i=0}^{h_n - 1} T^i F_n\right] > 1 - \varepsilon_n.$$

On divise les étages en $2n+3$ groupes:

$$\mathrm{I}_{nh} = \{T^l F_n, l \equiv 0 \quad [g_n] \text{ et } l \equiv h \quad [2n+1]\},$$

pour tout h entre $-n$ et n,

$$\mathrm{II}_n = \{T^l F_n, l \equiv 1 \quad [g_n] \text{ et } l \equiv 1 \quad [2n+1]\},$$

$$\mathrm{III}_n = \text{tous les autres étages.}$$

On note $PN(x) = i$ si x est dans P_i, $1 \leqq i \leqq k$. Q_n est définie comme suit:

si x est dans III_n ou dans $(X - \bigcup_0^{h_n - 1} T^i F_n)$, pour un n supérieur ou égal à 2, on met x dans Q_i^n, resp $\bar{Q}_i^n$, resp Q_{ij}^n, si x est dans Q_i^{n-1}, resp $\bar{Q}_i^{n-1}$, resp Q_{ij}^{n-1};

si x est dans III_1 ou dans $(X - \bigcup_0^{h_1 - 1} T^i F_1)$, on met x dans Q_i^1 si x est dans P_i ;

si x est dans II_n, on met x dans $\bar{Q}_i^n$ si x est dans P_i ;

si x est dans I_{nh}, on met x dans Q_{ij}^n, où

$$i = PN(x), \tag{22}$$

$$j = \sum_{s=0}^{g_n - 1} \sum_{t=-n}^{n} PN(T^{u_{h,s,t}+h} x) \text{ modulo } k. \tag{23}$$

Q_n est une partition finie de X. Par construction, Q_n vérifie (4_n), (5_n), (6_n) parce que Q_{n-1} vérifie (4_{n-1}), (5_{n-1}) et (6_{n-1}) et grâce au fait que:

$$\mu(\mathrm{II}_n) < \frac{1}{(2n+1)g_n}.$$

De même, Q_n vérifie (8_n) parce que:

$$\mu\left(\mathrm{II}_n \cup \bigcup_{h=-n}^{n} \mathrm{I}_{nh}\right) \leqq \frac{1}{(2n+1)g_n} + \frac{1}{g_n} < \frac{2}{g_n}.$$

Pour montrer que Q_n vérifie (7_n), on introduit les notations suivantes: pour tout entier z, $\bar{z}$ est sa classe modulo g_n, $\hat{z}$ sa classe modulo $2n+1$, $0 \leqq \bar{z} \leqq g_n - 1$, $-n \leqq \hat{z} \leqq n$; pour tout y de X, pour tout i et j,

$Q_n N_1(y) = i$ si y est dans Q_i^n, ou dans $\bar{Q}_i^n$, ou dans Q_{ij}^n,

$Q_n N_2(y) = j$ si y est dans Q_{ij}^n (il est inutile de définir $Q_n N_2$ ailleurs).

Pour tout i de $[0, g_n - 1]$, pour tout j de $[-n, n]$, soient

(24) $S(n,i,j) = \{u$, éléments de S_n, tels que $u \equiv 1 - i\ [g_n]$ et $u \equiv 1 - j\ [2n+1]\}$,

$$A_n = \bigcup_{i=0}^{g_n - 1} \bigcup_{j=-n}^{n} \bigcap_{u \in S(n,i,j)} T^{-u} E_{n-1}. \tag{25}$$

Comme S_n contient $\tilde{S}_n$, par (19), (20) et (21),

$$\mu\left(\bigcap_{u \in S(n,i,j)} T^{-u} E_{n-1} \right) < \frac{\varepsilon_n}{(2n+1) g_n},$$

et donc $\mu(A_n)$ est inférieure à ε_n.

Si $A'_n = \bigcup_{i=2R_n}^{h_n - 2R_n} T^i F_n \cap A_n^c$,

$$\mu(A'_n) \geqq 1 - (2/g_n + 2\varepsilon_n). \tag{26}$$

Supposons maintenant que x et y vérifient

$$x \text{ et } y \text{ sont éléments de } A'_n, \tag{27}$$

$$x \text{ et } y \text{ sont dans le même atome de } \bigvee_{i \in S_n} T^{-i} Q_n. \tag{28}$$

Soit $i(x)$ l'étage de la n-tour où se trouve x, et soit

$$B_n(x) = \{u, \text{ éléments de } S_n \text{ tels que } T^u x \text{ soit dans } E_n\};$$

on définit de même $B_n(y)$ et $i(y)$. Il est clair que u est dans $B_n(x)$ si et seulement si $\{T^u x$ est dans $E_{n-1}\}$ ou bien $\{u + i(x) \equiv 1\ [g_n]$ et $u + i(x) \equiv 1\ [2n+1]\}$. Donc $B_n(x)$ contient $S(n, \bar{i}(x), \hat{i}(x))$, et, à cause de (27), $B_n(x)$ ne peut contenir aucun autre $S(n,k,l)$ en entier. On a la même propriété en y. Or (28) implique que $B_n(x) = B_n(y)$. Comme les $S(n,k,l)$ forment une partition de S_n, et sont tous non vides, on en déduit:

$$\bar{i}(x) = \bar{i}(y) = \bar{i}, \qquad \hat{i}(x) = \hat{i}(y) = \hat{i}.$$

Maintenant, pour tout h de $[-n, n]$, $T^{u_{h,-\bar{i},h-\hat{i}}} x$ est dans I_{nh} grâce à (9) et (10). Donc $Q_n N_2(T^{u_{h,-\bar{i},h-\hat{i}}} x)$ existe et (22) et (23) donnent la formule explicite

$$PN(T^h x) = Q_n N_2(T^{u_{h,-\bar{i},h-\hat{i}}} x) - \sum_{(\alpha,\beta) \neq (-\bar{i}, h-\hat{i})} Q_n N_1(T^{u_{h,-\bar{i},h-\hat{i}} - u_{h\alpha\beta} + h} x) \quad (\text{modulo } k),$$

on a la même formule en y, et comme tous les termes $u_{h,-\bar{i},h\ i} - u_{h\alpha\beta} + h$ sont dans S_n, (27) et (28) impliquent que x et y sont dans le même atome de $T^{-h}P$, pour tout h de $[-n, n]$. Ce qui, joint à (26), démontre (7_n).

Démonstration de la Proposition 1.

$$S = \bigcup_{n \geqq 0} S_n.$$

(2_n) et (3_n) assurent que pour tout n est pour tout j,

$$\operatorname{card}[S \cap [j - R_n, j + R_n]] \leqq \operatorname{card}[S \cap [-R_n, R_n]] \leqq 2R_n \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{R_n} e^{-i} < 2ne^{-n}R_n,$$

et donc S est de densité supérieure nulle.

On impose maintenant sur g_n et ε_n les conditions suivantes:

$$\sum_{n \geqq 0} 2/g_n < +\infty, \tag{29}$$

et, si $d_{n+1} = \sum_{i \geq n+1} 2/g_i$, si $c_n = \operatorname{card} S_n$,

$$\sum_{n \geqq 0} 2/g_n + 2\varepsilon_n + d_{n+1}c_n < +\infty. \tag{30}$$

Alors (8_n) et (29) assurent qu'il existe une partition Q limite des Q_n, vérifiant:

$$|Q_n - Q| < d_{n+1} \qquad \text{pour tout } n. \tag{31}$$

Donc $\bigvee_{i \in S_n} T^{-i}Q$ coincide avec $\bigvee_{i \in S_n} T^{-i}Q_n$ sur un ensemble de mesure supérieure à $(1 - c_n d_{n+1})$.

Donc, d'après (7_n), $\bigvee_{i \in S_n} T^{-i}Q$ raffine $\bigvee_{-n}^{n} T^j P$ sur un ensemble G_n tel que:

$$\mu(X - G_n) < 2/g_n + 2\varepsilon_n + c_n d_{n+1}. \tag{32}$$

Si $G = \bigcup_{n \geqq 0} \bigcap_{i \geqq n} G_i$, $\mu(G) = 1$ par (30), (32) et Borel–Cantelli. Et si x et y sont dans G et $T^u x$ et $T^u y$ sont dans le même atome de Q pour tout u de S, x et y sont dans G_i pour tout i assez grand et par conséquent sont dans le même atome de $\bigvee_{-i}^{i} T^j P$ pour tout i assez grand; donc $x = y$ puisque P est génératrice. Donc:

$$\mathscr{A} = \bigvee_{i \in S} T^{-i}Q. \qquad \text{CQFD.}$$

La fin de cette démonstration suit [1] de près. A priori, S dépend du système considéré. On a toutefois:

Proposition 2. *Il existe une suite S^0 d'entiers, de densité supérieure nulle, telle* *que, dans tout système dynamique $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ d'entropie finie fortement mélangeant, il existe une partition finie Q de X, telle que $\bigvee_{i \in S^0} T^{-i}Q$ soit toute la σ-algèbre $\mathcal{A}$.*

DÉMONSTRATION. On construit d'abord la suite S^0, indépendamment de tout système. Pour cela, on se donne une suite de réels ε_n, et deux suites d'entiers positifs l_n et g_n vérifiant:

(1) $$g_n \equiv 1 \quad [2n+1] \qquad \text{pour tout } n,$$

(29) $$\sum_{n \geqq 0} 2/g_n < +\infty,$$

(33) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)g_n} < \frac{1}{2},$$

(34) $$\left(2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)g_i}\right)^{l_n} \leqq \frac{\varepsilon_n}{(2n+1)g_n} \qquad \text{pour tout } n,$$

(35) $$\sum_{n \geqq 0} d_{n+1}[(2n+1)^3 g_n^2 + (2n+1)^2 g_n + (2n+1)g_n l_n] + 2\varepsilon_n + \frac{2}{g_n} < +\infty$$

$$\text{si } d_{n+1} = \sum_{i \geqq n+1} 2/g_i.$$

De telles suites existent (il suffit de choisir l_n au stade n et de prendre $g_{n+1}, g_{n+2}, \cdots$ assez grands). Les g_n tendent vers $+\infty$ et les ε_n vers 0.

On définit par récurrence des suites S'_n:

$$S'_0 = \{0\}. \qquad \text{Soit } R_{n-1} = \sup_{x \in \cup_{i=0}^{n-1} S'_i} |x|.$$

On choisit des $u_{h,i,j}$ vérifiant (9), (10), (11) et (12) et on définit $\bar{S}_n$ par (A).

Soit $\bar{R}_n = \operatorname{Sup}_{x \in \bar{S}_n} |x|$. On choisit $(\sum_{i=0}^{n-1}(2i+1)g_i)$ entiers, notés $v_{k,\alpha,\beta}(n)$, $0 \leqq k \leqq n-1$,[†] $0 \leqq \alpha \leqq g_k - 1$, $-k \leqq \beta \leqq k$, vérifiant

(36) $$v_{k,\alpha,\beta}(n) \geqq \bar{R}_n + e^n,$$

(37) $$v_{k,\alpha,\beta}(n) \equiv 1 - \alpha \quad [g_k],$$

(38) $$v_{k,\alpha,\beta}(n) \equiv 1 - \beta \quad [2k+1],$$

(39) deux $v_{k,\alpha,\beta}(n)$ consécutifs diffèrent d'au moins e^n,
(c'est toujours possible par (1)).

[†] Les $u_{h,i,j}$ dépendent aussi de n mais, dans leur cas, il n'est pas utile de l'indiquer explicitement.

On prend pour $\hat{S}_n$ l'ensemble de ces $v_{k,\alpha,\beta}(n)$; on pose $S'_n = \bar{S}_n \cup \hat{S}_n$; il est clair que S'_n vérifie (2_n) et (3_n).

Soit $S^0 = \bigcup_{n \geq 0} S'_n$; S^0 est de densité supérieure nulle.

Soit maintenant $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ un système dynamique mélangeant; soit $P = (P_1, \cdots, P_k)$ un générateur fini de (X, T); on va construire, pour tout entier n, une suite S_n et une partition Q_n vérifiant (4_n), (5_n), (6_n), (7_n), (8_n) et "S^0 contient S_n". On part de $Q_0 = P$, $S_0 = \{0\}$.

CONSTRUCTION DE Q_n ET S_n. Soit E_{n-1} l'ensemble défini par (6_{n-1}); soient α un entier compris entre 0 et g_{n-1} et β un entier compris entre $-n$ et n. Pour $k = 1, 2, 3, \cdots$ soit $v_{n,\alpha,\beta}(n+k)$ l'élément de la suite $\hat{S}_{n+k}$ défini précédemment (il existe bien puisque $0 \leqq n \leqq n+k-1$, $0 \leqq \alpha \leqq g_n - 1$, $-n \leqq \beta \leqq n$).

Le mélange et le fait que $v_{n,\alpha,\beta}(n+k)$ tend vers l'infini quand k tend vers l'infini assurent que pour $k_1 = 1$, il existe k_2 tel que:

$$\mu(T^{-v_{n,\alpha,\beta}(n+k_2)}E_{n-1} \cap T^{-v_{n,\alpha,\beta}(n+k_1)}E_{n-1}) < (2\mu(E_{n-1}))^2.$$

De même, il existe $k_1, \cdots, k_{l_n}$, dépendant de α, β, tels que

$$\mu\left(\bigcap_{\gamma=1}^{l_n} T^{v_{n,\alpha,\beta}(n+k_\gamma)}E_{n-1}\right) < (2\mu(E_{n-1}))^{l_n} \tag{40}$$

On pose $w_{\alpha,\beta,\gamma} = v_{n,\alpha,\beta}(n + k_\gamma(\alpha,\beta))$, $0 \leqq \alpha \leqq g_n - 1$, $-n \leqq \beta \leqq n$, $1 \leqq \gamma \leqq l_n$, après avoir fait cette construction pour tous les α, β.

Les $w_{\alpha,\beta,\gamma}$ vérifient (19) grâce à (37), (20) grâce à (38) et (21) grâce à (40), (6_{n-1}) et (34).

On prend pour $\tilde{S}_n$ l'ensemble de ces $w_{\alpha,\beta\in\gamma}$, et $S_n = \bar{S}_n \cup \tilde{S}_n$. S^0 contient bien S_n.

On suit désormais exactement la démonstration de la proposition 1, en remplaçant R_n par $\tilde{R}_n = \mathrm{Sup}_{x \in S_n} |x|$.

On construit ainsi Q_n vérifiant (4_n) à (8_n). Pour la suite, on remarque que, par construction:

$$c_n \leqq (2n+1)^3 g_n^2 + (2n+1)^2 g_n + (2n+1) g_n l_n, \tag{41}$$

et que donc (30) est vérifiée grâce à (35), et (29) par hypothèse. On conclut donc à l'existence de Q telle que $\bigvee_{i \in S^0} T^{-i}Q = \mathcal{A}$. CQFD

REMARQUE. Dans les deux propositions, si P a k éléments, Q en a $(k^2 + 2k)$. D'autre part, puisqu'on peut commencer la construction à n'importe quel stade (c'est-à-dire prendre $Q_{n-1} = P$), on peut obtenir Q arbitrairement proche de P; en particulier, pour tout ε, on peut obtenir Q vérifiant

$$\mathscr{A} = \bigvee_{i \in S} T^{i} Q \quad \text{et} \quad E(Q) < E(P) + \varepsilon.$$

Questions. Peut-on étendre la proposition 1 ou la proposition 2 à tout système ergodique?

Peut-on trouver un système $(X, \mathscr{A}, T, \mu)$ ergodique, une partition Q de X, une suite S de densité supérieure nulle tels que $\mathscr{A} = \bigvee_{i \in S} T^{i} Q$ et $\{T^{-i}Q, i$ élément de $S\}$ soit une suite de partitions indépendantes?

Référence

1. D. Ornstein et B. Weiss, *Every transformation is bilaterally deterministic*, Isr. J. Math. **21** (1975), 154–158.

Université Paris VI
Laboratoire de Probabilités
4 Place Jussieu
75005 Paris, France